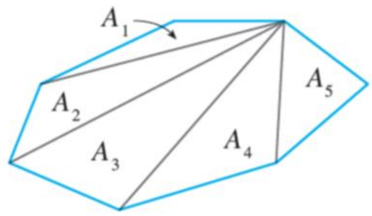
Revisão de Cálculo - Primeiro Questionário

STEWART, James, Cálculo, Volumes I e II, Editora Thomson.

Limites, Exponenciais e Logaritmos

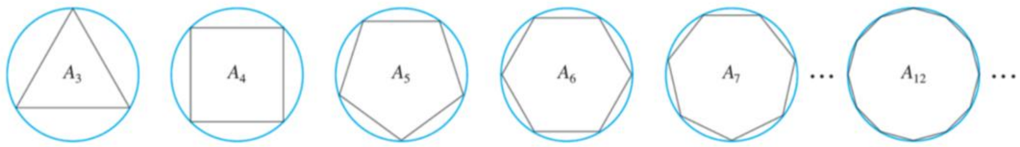
O problema da área

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2.500 anos atrás, quando áreas eram calculadas utilizando o chamado "método da exaustão". Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos e, em seguida, somando as áreas obtidas.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. Assim os gregos propuseram o método da exaustão, que consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles.



Se A_n é a área do polígono inscrito com n lados, à medida que aumentamos n, A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos:

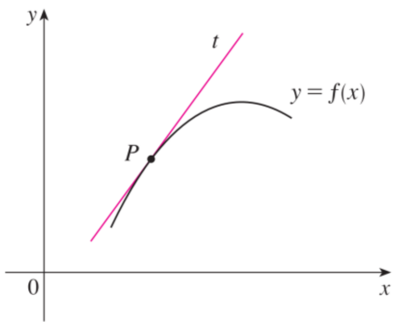
$$A = \lim_{n \to \infty} An$$

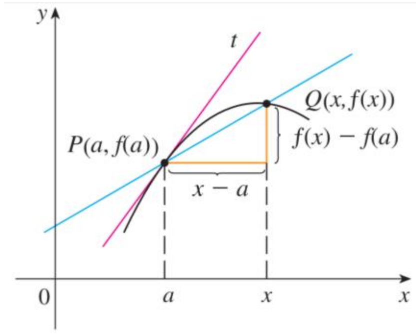
Entretanto, os gregos não usaram explicitamente os limites.

O problema da tangente

Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$, em um dado ponto P. Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que, para calcular a inclinação, é necessário conhecer dois pontos e, sobre t, temos somente o ponto P. Para contornar esse problema, determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação mPQ da reta secante PQ.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$





Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente.
Isso é denotado por:

$$m = \lim_{P \to Q} m_{PQ}$$

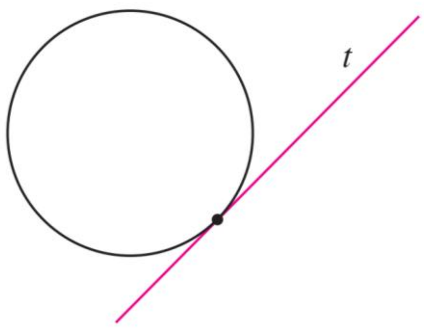
e dizemos que $\boldsymbol{m}$ é o limite de quando $\boldsymbol{Q}$ tende ao ponto $\boldsymbol{P}$ ao longo da curva. Uma vez que $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ quando $\boldsymbol{Q}$ tende a $\boldsymbol{P}$, também podemos usar a seguinte equação para escrever:

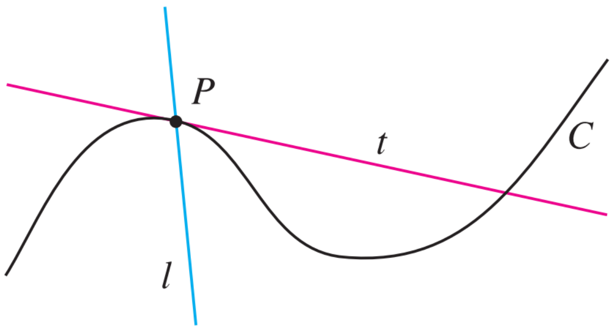
$$m_{PQ} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado cálculo diferencial, que só foi inventado mais de 2 mil anos após o cálculo integral.

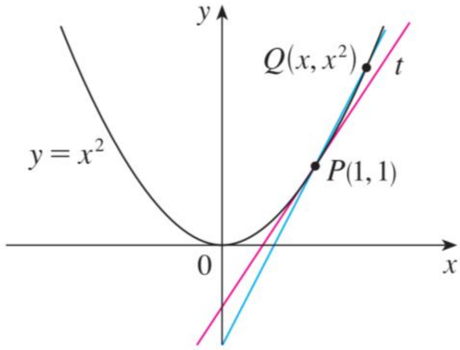
Continuando o problema da tangente

A palavra tangente vem do latim tangens, que significa “tocando”. Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. Para um círculo, poderíamos dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez.





Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. Na figura a seguir, as retas, l e t, passam pelo mesmo P em uma curva C. A reta l intersecta (cruza) C somente uma vez, mas certamente não se parece com uma tangente. A reta t, parece ser uma tangente, mas intercepta C duas vezes.
Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que, para calcular a inclinação, é necessário conhecer dois pontos e, sobre t, temos somente o ponto P. Para contornar esse problema, determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação da reta secante m_{PQ} da reta PQ.
Para calcular uma aproximação de m escolhemos um ponto próximo $Q\ (x, x^2)$ sobre a parábola e calculamos a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ.



$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Escolhendo $x \neq 1$ para que $Q \neq P$, temos $m_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$

Escolhendo o ponto *Q(1,5 , 2,25)*, temos

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1.

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
1,0001	2,0001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999

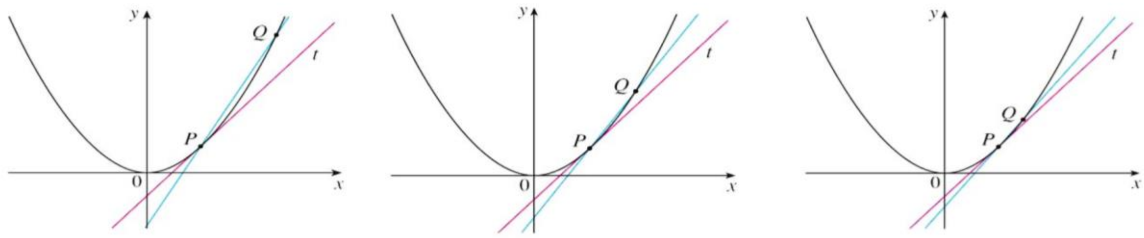
Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1 e m_{PQ} estará próximo de 2.
Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.
Dizemos que a inclinação da reta tangente é o limite das retas secantes. Simbolicamente escrevemos:

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = M \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

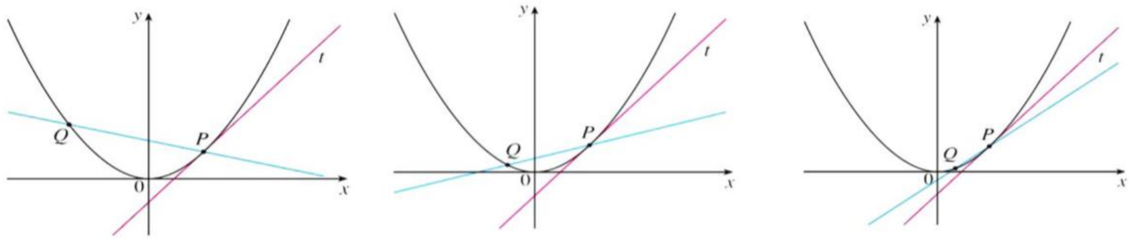
Supondo que a inclinação da reta tangente seja 2, podemos escrever a equação da tangente no ponto (1, 1) como:

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1$$

Dizemos que a inclinação da reta tangente é o limite das retas secantes. Simbolicamente escrevemos:
lim $Q \to P$ $mPQ = m$ e lim$x \to 1$ x 2−1 x−1 = 2
Graficamente, podemos observar quando Q se aproxima de P pela direita:



Graficamente, podemos observar quando Q se aproxima de P pela esquerda:



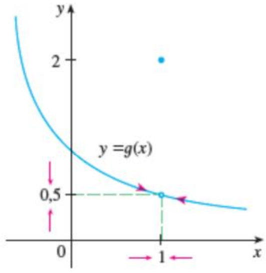
Exercícios

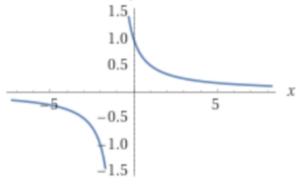
STEWART, James, Cálculo, Volumes I, pág 93, 94, 95 e 96

1) Encontre o valor do $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

$x < 1$	$\dfrac{x-1}{x^2-1}$	$x > 1$	$\dfrac{x-1}{x^2-1}$

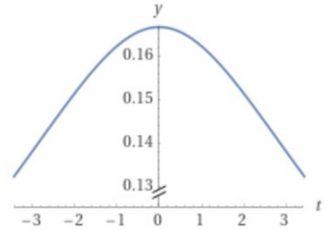
2) Encontre o valor de $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ quando $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & se\ x \neq 1 \\ 2 & se\ \ x = 1 \end{cases}$





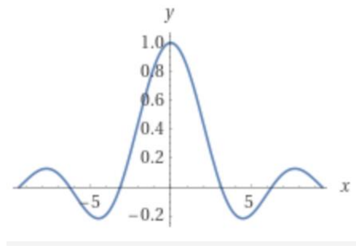
3) Encontre o valor do $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$	T	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$



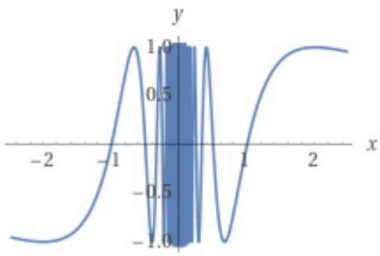
4) Encontre o valor do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

x	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$	x	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$



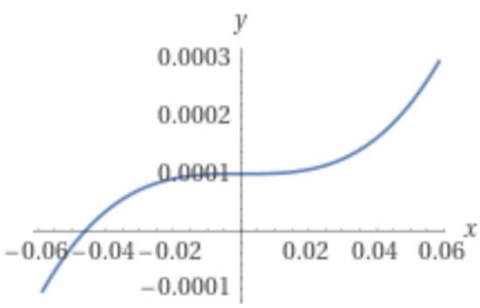
5) Encontre o valor do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi}{x}$

x	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi}{x}$	x	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$



6) Encontre o valor do $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+\dfrac{\cos 5x}{10.000}\right)$

x	$x^3+\dfrac{\cos 5x}{10.000}$	x	$x^3+\dfrac{\cos 5x}{10.000}$



Relembrando a Lei dos Expoentes:

LAWS OF EXPONENTS If a and b are positive numbers and x and y are any real numbers, then

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

Relembrando a Lei dos logaritmos:

LAWS OF LOGARITHMS If x and y are positive numbers, then

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (where r is any real number)

Onde:

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{for every } x > 0$$

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

10 **CHANGE OF BASE FORMULA** For any positive number a ($a \neq 1$), we have

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

7) Encontre o valor do $\log_2 80 - \log_2 5$

8) Encontre o valor de x, em $e^{5-3x} = 10$

9) Expresse a $ln\, a + \frac{1}{2} ln\, b$, em apenas uma expressão:

10) Encontre o valor de $log_8 5$, em até seis casas decimais: